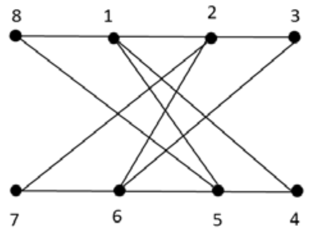
RECORRIDOS EN GRAFOS
Entrega 7

GRAFOS EULERIANOS

1. Para el grafo de la figura, halla un recorrido euleriano cerrado aplicando el algoritmo de Hielholzer:



Solución

Un recorrido euleriano cerrado es: *C* = {8, 5, 4, [1, 2, 3, [6, 2, 7, 6], 5, 1], 8}.

2. Estudia si el grafo *G* que tiene por matriz de adyacencia $\mathrm{M_a(G)} = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&1\\ 1&0&0&0&0&1&1&1\\ 1&1&0&0&0&0&0&1\\ 1&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&1&0&0&0 \end{pmatrix}$

admite un recorrido euleriano abierto o cerrado y en caso afirmativo hállalo.

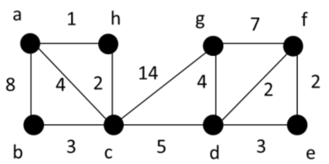
Solución

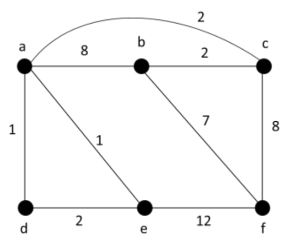
$\delta(1) = 4$, $\delta(2) = 4$, $\delta(3) = 3$, $\delta(4) = 4$, $\delta(5) = 3$, $\delta(6) = 4$, $\delta(7) = 4$ y $\delta(8) = 4$.

Por lo tanto el grafo no admite recorrido euleriano cerrado, pero admite un recorrido euleriano abierto ya que sólo tiene dos vértices impares.

Un recorrido euleriano abierto es: *C* = {3, 7, 4, 8, 2, 5, 8, 3, 6, 2, 7, 1, 4, 6, 1, 5}

3. Cada uno de los siguientes grafos con pesos modelan las calles de un barrio: los nodos son las intersecciones entre las calles y el peso en cada arista es una estimación del tiempo que se tarda en recorrer la calle. Halla, para cada uno de los siguientes grafos, un recorrido cerrado para un cartero que sale de la oficina de correos con las cartas, recorre todas las calles de su zona al menos una vez y vuelve a la central, cuyo tiempo de recorrido sea mínimo:





Solución

En el grafo G_1 hay 4 vértices de grado impar {a, c, f, g}, con los que construimos K_4 .
El emparejamiento de peso mínimo en K_4 es {ac, fg}.
En el grafo G_1 se duplican las aristas {ah, hc, fd, dg}, el grafo $G_1 \cup$ {ah, hc, fd, dg} es euleriano.

En el grafo G_2 hay 4 vértices de grado impar {b, c, e, f}, con los que construimos K_4 .
El emparejamiento de peso mínimo en K_4 es {bf, ce}.
En el grafo G_1 se duplican las aristas {bf, ca, ae}, el grafo $G_2 \cup$ { bf, ca, ae } es euleriano.

GRAFOS HAMILTONIANOS

4. En una red de 10 ordenadores cada nodo está conectado al menos con otros 6 y el número total de conexiones es múltiplo de 13.
   a) ¿Es la red conexa? ¿Cuántas conexiones tiene?
   b) ¿Es la red hamiltoniana?
   c) Si la red es euleriana, ¿cuántos nodos de grado seis tiene?

   Solución:

   a) G es conexo ya que si $6 \le \delta(v)$ entonces hay al menos 7 vértices en cada componente conexa y con n = 10 vértices no es posible que haya más de una componente conexa.
   Como card V = 10, $6 \le \delta(v) \le 9$, card A = 13 k entonces $60 \le \sum \delta(v) \le 90 \Rightarrow 60 \le 26\,k \le 90 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow card\ A = 39$ conexiones.
   b) Puesto que $\delta(v) \ge 6 \ge n/2 = 5$, entonces G es hamiltoniano.
   c) Si G es euleriano entonces $\delta(v) = \begin{cases} 6 \\ 8 \end{cases} \Rightarrow \sum \delta(v) = 6\,a + 8\,b = 2$ card A = 78 $\Rightarrow$

$$\begin{cases} a = -39 + 4\,t \ \ge 0 \\ b = 39 - 3\,t \ \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow t = 10 \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ vértice de grado } 6 \\ b = 9 \text{ vértices de grado } 8 \end{cases}$$

5. En la isla de Wanda los lugares interesantes y los caminos que los unen están representados por el grafo cuya lista de adyacencia es:

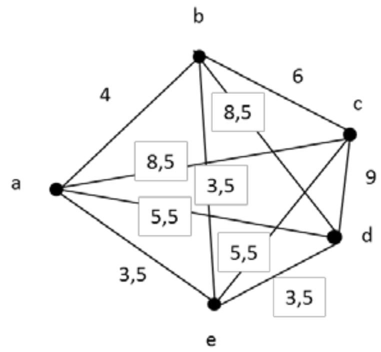
   Estudia si es posible encontrar
   a) un camino euleriano abierto o cerrado.
   b) un camino hamiltoniano abierto o cerrado.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	0	3	0	1	0	1
3	2	3	2	5	4	5	2	3
5	6	7	4		6	7	6	5
7	8		8		8		8	7

   Solución

   a) d = [4, 4, 3, 4, 2, 4, 3, 4, 4], no existe camino euleriano cerrado; pero existe un camino euleriano abierto: C = {2, {3, 8, 1, 6, 7, 0, 3}, 4, {5, 8, 7, 2, 1, 0, 5}, 6}
   b) Es un grafo bipartido: V = {0, 2, 4, 6, 8} $\cup$ {1, 3, 5, 7}, no existe camino hamiltoniano cerrado; pero existe un camino hamiltoniano abierto: C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

6. Aplica el algoritmo para obtener un ciclo hamiltoniano de peso 2 – aproximado al óptimo para el siguiente grafo con pesos, siendo el peso asignado a cada arista la distancia entre los vértices.


b
4
6
8,5
c
a
8,5
3,5
9
5,5
d
5,5
3,5
3,5
e